МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ (ММИ)

ММИ применяется для доказательства утверждений, которые должны быть верными для всех натуральных чисел. ММИ основан на ПРИНЦИПЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ:

Некоторое утверждение верно при любом натуральном n, если:
1) это утверждение верно при $n=1$ (база индукции),
2) из справедливости этого утверждения при $n=k$ следует его справедливость при $n=k+1$, каково бы ни было натуральное число k (индукционный переход).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	…

Пример. Доказать, что число n^3-n делится на 3 при любом натуральном n.
Решение. Проверяем базу индукции: $n=1$. 1 – 1 = 0 – делится на 3.
Пусть k^3-k делится на 3 при натуральном k. Тогда при $k+1$ получаем:
$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=(k^3-k)+3(k^2+k)$ – делится на 3, так как k^3-k делится на 3. Значит, n^3-n делится на 3 при любом натуральном n.

Задачи

Задача 1. Верно ли, что сумма кубов трёх идущих подряд натуральных чисел всегда делится на 9?

Задача 2. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{3n}-7n-1$ кратно 49.

Задача 3. Докажите, что $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ при любом натуральном n.

Задача 3′. Докажите, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+...+n)^2$ при любом натуральном n.

Задача 4. Докажите, что $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ при любом натуральном $n>1$.

Задача 5. Докажите, что $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$, если («$n$ факториал») $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.

Задача 6. Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$ для любого натурального n.

Задача 7. Докажите, что при любом натуральном n число $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ кратно 11.

Задача 8. Докажите, что $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$ при любом натуральном $n>1$.

Задача 9. Докажите, что $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Задача 10*. Докажите, что при любом целом n число n^5-5n^3+4n кратно 120.

Лазарева Елена Геннадьевна lazareva-e-g73@mail.ru